置換積分はこうやれ！

$$\int v(u(x)) \cdot u(x)dx = v(u(x)) + C$$

というのは

$$\frac{d}{dx}v(u(x)) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$$

の逆変形である。

(例)

$$\int x(x^2+1)dx \ = \ \int \frac{1}{2}\cdot(x^2+1)'\cdot(x^2+1)dx \ = \ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^2+C \ = \ \frac{1}{4}(x^2+1)^2+C$$

これは

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{4}(x^2+1)^2\right\} \ = \ \frac{1}{4}\cdot2\cdot(x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1) \ = \ \frac{1}{4}\cdot2\cdot(x^2+1)\cdot2x \ = \ x(x^2+1)$$

$$(\ u(x) = x^2+1, \ v(x) = x^2 \ )$$

つまり、合成関数の微分の逆をやればよい。 これも慣れだ。

【1-1】

$$\int x(x^2+1)^4dx = \int \frac{1}{2}\cdot(x^2+1)'\cdot(x^2+1)^4dx$$

(ある関数の微分)・(ある関数の合成関数) に変形　そして合成関数の微分を思い浮かべて

$$\int \frac{1}{2}\cdot(x^2+1)'\cdot(x^2+1)^4dx = \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{1}{5}(x^2+1)^5\right\}+C = \frac{1}{10}(x^2+1)^5+C$$

分かりにくいなら、 $x^2+1=t$ とおく。

$$\frac{d}{dt}(x^2+1)=\frac{d}{dt}(t) \quad 2\cdot\frac{dx}{dt}\cdot x=1 \quad dx=\frac{1}{2x}dt$$

$$\int x(x^2+1)^4 dx \;=\; \int x\cdot t^4\cdot\frac{1}{2x}dt \;=\; \int \frac{1}{2}t^4 dt \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot t^5+C \;=\; \underline{\frac{1}{10}(x^2+1)^5+C}$$

慣れるまではこうやったほうがいいだろう。

【1-2】

分母の x^2+2x+3 を t とおく

$$\frac{d}{dt}(x^2+x2+3)=\frac{d}{dt}(t) \quad \frac{dx}{dt}\;\cdot\;2(x+1)=1 \quad dx=\frac{dt}{2(x+1)}$$

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^3}dx \;=\; \int \frac{x+1}{t^3}\cdot\frac{dt}{2(x+1)} \;=\; \int \frac{dt}{2t^3} \;=\; -\frac{1}{4}t^{-2}+C \;=\; \underline{-\frac{1}{4(x^2+2x+3)^2}+C}$$

慣れたら

$$\int \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^3}dx=\int \frac{\frac{1}{2}\cdot(x^2+2x+3)'}{(x^2+2x+3)^3}dx=-\frac{1}{4(x^2+2x+3)^2}+C$$

といける。

【1-3】

$$\int \sin^4 x \cos x dx$$

$\sin x = t$　とおく。

$$\frac{d}{dt}(\sin x) = \frac{d}{dt}(t) \quad \frac{dx}{dt} \cdot \cos x = 1 \quad dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$\int \sin^4 x \cos x dx \ = \ \int t^4 \cdot \cos x \cdot \frac{dt}{\cos x} = \int t^4 dt \ = \ \frac{1}{5}t^5 + C \ = \ \underline{\frac{1}{5}\sin^5 x + C}$$